MATEMATICA E LOGICA

Carlo Felice Manara
Emerito dell'Università di Milano

"On peut avoir trois principaux objets dans l'étude de la verité: l'un de la découvrir quand on la cherche; l'autre de la démontrer quand on la possède; le dernier de la discerner d'avec le faux quand on l'examine".
[Blaise Pascal.
De l'esprit géométrique et de l'art de persuader]

1 - Logica e matematica. Alle origini della matematica formalmente rigorosa

E' lecito il pensare che fin dall'apparire del trattato euclideo (il primo trattato rigoroso di matematica che la nostra storia umana ricordi) la matematica sia stata considerata come il campo di elezione, in cui la logica viene applicata in forma metodica; ed è naturale che il suo impiego sia stato giudicato imprescindibile e quasi, per così dire, costitutivo della dottrina.

Tuttavia, nella visione della filosofia greca (soprattutto nella visione aristotelica) la distinzione tra le due dottrine era chiara; ed appariva pacifico il fatto che la matematica (e precisamente la geometria, che a quell'epoca forniva la parte prevalente della dottrina) fornisse piuttosto i contenuti per la logica, presentasse le esemplificazioni dei paradigmi; non gli strumenti concettuali, e soprattutto non gli strumenti espressivi, perché, come è noto, la logica si avvaleva esclusivamente della lingua comune.

E' facile osservare che una simile situazione si è protratta per millenni: invero ancora oggi la geometria viene spesso presentata con gli strumenti verbali della lingua comune; quindi, accanto alla geometria analitica (sulla quale ritorneremo) l'argomentazione sillogistica classica è uno degli strumenti fondamentali per una certa didattica della geometria.

Occorre tuttavia ricordare che il pensiero greco non si è limitato ad utilizzare la logica per sviluppare la matematica, ma ha compiuto anche un ulteriore passo essenziale: esso infatti ha impostato la riflessione fondamentale sul ruolo che la logica svolge per il pensiero matematico; in particolare sul compito della logica nella creazione delle verità matematiche, nella loro dimostrazione (cioè nella difesa di tali verità) e nella soluzione dei problemi; infatti già in Euclide troviamo accennata tale questione; ed in Proclo troviamo codificato il metodo di "analisi" e di "sintesi" per la dimostrazione e l'accertamento delle verità matematiche e per la risoluzione dei problemi.

La situazione dei rapporti tra matematica e logica deduttiva (intesa quest'ultima come strumento in certo modo canonico della prima) è bene descritta dalle parole di F. Enriques: "La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento 'analitico' che si mette in opera nella soluzione dei problemi geometrici. In questa 'analisi' si comincia a supporre che il problema proposto P sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema R che si sappia risolvere. La 'sintesi' consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema R, e dedurre via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione è necessaria, perché con l'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono soluzioni di R, ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (ed è quindi in rapporto con la teoria platonica delle idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi la quale - da sola - fornisce certo soluzioni del problema, ma non tutte.

Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel processo moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di soluzione detto 'dei luoghi geometrici' è divenuto, con Cartesio, il fondamento dell'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria.

Nella trattazione algebrica si è vista soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di 'geometria analitica' e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di 'analisi matematica'. Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre a una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica, ecc". (1)

Si potrebbe tuttavia osservare che questa pagina esemplarmente chiara del matematico italiano presenta soltanto un aspetto del ruolo ricoperto dalla logica nell'ambito del pensiero matematico successivo; e precisamente espone il compito svolto dalla logica nell'operazione di deduzione.

Ma occorre anche dire che la scoperta matematica richiede in grande quantità anche delle procedure induttive; un fatto questo che non sempre è chiaro e noto a chi guardi il pensiero matematico dall'esterno, oppure si limiti a studiare i trattati o i manuali; perché nel momento dell'esposizione dei risultati quasi mai si fa menzione del travaglio che ha preceduto la scoperta o l'invenzione; ma tale travaglio è ben noto ai matematici.

Chi scrive ricorda di aver letto una pagina interessante di un matematico (il cui nome purtroppo è stato in questo caso cancellato dalla memoria) il quale descriveva la scoperta matematica come la fatica di chi sale una montagna per un cammino difficile, sparso di rovi e di sterpi; arrivato in cima, stanco, affannato e graffiato dai rovi, il ricercatore scopre che esiste una strada larga, comoda e sicura, che dal versante opposto conduce alla cima.

Ma quest'ultima scoperta è quasi certamente il frutto della fatica precedente, ed in particolare di tutto un lavoro di intuizione, di formulazione di ipotesi, di induzione, di tentativi di verifica, che sparisce nell'esposizione, per così dire, togata, ma che è spesso essenziale per i risultati; lavoro in cui la logica induttiva esplica un compito insostituibile, insieme con quella deduttiva.

E' questo un travaglio, come ho detto poco fa, ben noto ai matematici; esso viene risparmiato soltanto ai più grandi, che arrivano alla cima senza passare per la foresta, volando con ali che la Provvidenza ha concesso soltanto a pochissimi privilegiati nel corso della storia umana.

2 - L'impatto con i nuovi strumenti espressivi e l'inizio della indipendenza del pensiero matematico dalla lingua comune

Prendendo le mosse dalla pagina di Enriques che ho citato, vorrei riflettere qui sull'importanza che gli strumenti di espressione, via via maturati durante i secoli, hanno per il pensiero matematico. In questo ordine di idee credo sia giusto dire che l'adozione delle convenzioni arabo-indiane per la rappresentazione dei numeri naturali sia stata uno dei momenti più importanti per la nostra civiltà.

Si osservi invero che tale adozione non soltanto permette di rappresentare numeri comunque grandi in modo chiaro ed uniforme, ma soprattutto permette di eseguire in forma chiara, spedita ed uniforme anche le operazioni sui numeri stessi. Se si osserva che ogni operazione aritmetica può essere vista sotto l'aspetto di una deduzione, si giunge facilmente a concludere che l'introduzione delle convenzioni arabo-indiane per la rappresentazione dei numeri doveva manifestare la propria importanza, in tutti gli ambiti in cui la logica normale deduttiva viene impiegata, e soprattutto nelle scienze della Natura e nella geometria; si avviò quindi un processo di evoluzione che produsse conseguenze anche nella logica propriamente detta.

Invero già nelle pagine di Cartesio (2) si trova esplicitamente affermato che egli intende presentare un metodo, e non un insieme di risultati e di contenuti. E, come abbiamo visto, il metodo è in questo caso un insieme di regole per la deduzione, applicabili quando si siano utilizzate certe convenzioni per la rappresentazione degli enti considerati. Tali regole si riducono in sostanza a dei calcoli algebrici, eseguiti sui numeri che oggi noi chiamiamo le coordinate degli enti di cui si parla. Appare quindi chiaro che le convenzioni della cosiddetta "Geometria analitica" ottengono, come risultato finale, la sostituzione delle regole classiche della deduzione con regole formali di manovra dei simboli, oppure, se si vuole, regole sintattiche delle trasformazioni di formule ben formate.

In altri termini, il metodo della geometria analitica non ha sostituito l'essenza del metodo di analisi codificato dalla geometria classica; esso ha sostituito alla deduzione, fatta con gli strumenti della lingua comune e con le regole della sillogistica classica, la deduzione ottenuta con l'applicazione delle regole formali dell'algebra, o addirittura delle regole formali della logica simbolica.

Guardando queste cose sotto un'altra luce, si potrebbe dire che le idee di Cartesio hanno dato inizio al distacco del linguaggio della geometria dal linguaggio comune, inteso come strumento di comunicazione e di espressione ma soprattutto come strumento di deduzione; ma ovviamente non si tratta di una evoluzione che porta al distacco dalla matematica dalla logica e dalle sue leggi; ché anzi si potrebbe dire che l'adozione dei nuovi mezzi di rappresentazione e di deduzione ha fatto circolare una nuova vita nel vecchio tronco della geometria classica.

Ed abbiamo già detto che alla radice di questa nuova vita sta la rivoluzione provocata dalla introduzione e dalla adozione in Occidente delle convenzioni arabo-indiane per la rappresentazione dei numeri.

Ho detto poco sopra che l'evoluzione nei metodi della geometria avrebbe prodotto delle conseguenze anche per la stessa logica; ritorneremo su questo argomento, e qui mi limito a ricordare di passaggio il volume di "Calcolo geometrico" di G. Peano; opera che il matematico italiano apre con un capitolo dedicato all'introduzione di simboli di logica e di regole per la deduzione, eseguita con l'impiego di tali simboli. (3)

Anticipando qui in parte ciò che prenderemo in considerazione nel seguito immediato, direi che in questo atteggiamento di Peano si può intravvedere l'importanza dei legami reciproci che uniscono strettamente le procedure formali di deduzione e le convenzioni che noi utilizziamo per rappresentare i concetti e per comunicare con i nostri simili.

3 - La deduzione ridotta a calcolo; gli inizi del fenomeno

Abbiamo visto poco sopra che, con l'avvento della dottrina che è stata chiamata "geometria analitica" per le ragioni così bene espresse nella pagina citata di Enriques, il momento deduttivo, ineliminabile nelle procedure classiche di analisi e di sintesi, veniva ricondotto a procedure di calcolo algebrico. Tuttavia si può osservare che questo superamento dei metodi della geometria classica (la quale - come abbiamo detto - si avvale prevalentemente della deduzione sillogistica verbale abituale, e delle sue regole) richiede che siano stabilite certe convenzioni: scelta di un sistema di riferimento, o in generale di procedure per rappresentare con numeri gli oggetti della geometria.

Si comprende tuttavia che con la geometria analitica si era aperto il cammino per un progresso ulteriore; questo doveva condurre da una parte a costruire certi insiemi di simboli atti a rappresentare direttamente, per così dire, gli oggetti della geometria, senza il tramite di sistemi di riferimento sempre in certa misura arbitrari. Dall'altra parte un cammino parallelo doveva condurre a rappresentare in qualche modo i concetti, i loro rapporti e le procedure di deduzione, senza il tramite di una lingua per così dire letteraria, utilizzata anche per altre operazioni di comunicazione diverse da quelle richieste dalla deduzione rigorosa, per esempio per suscitare emozioni e descrivere stati d'animo.

E' noto che l'evoluzione secondo la prima strada ebbe luogo prevalentemente nel secolo XIX, con l'invenzione di varie notazioni geometriche [quaternioni, vettori, forme geometriche di Peano, omografie vettoriali, ecc.].

L'evoluzione secondo la seconda strada ebbe inizio sostanzialmente con W. G. Leibniz; in modo sommario e rudimentale si potrebbero identificare due momenti fondamentali di questa vicenda: un primo momento che si realizza con l'opera di Leibniz (citato or ora) e con le rappresentazioni logico-diagrammatiche di Eulero. Si può dire che le idee dei due grandi sono strettamente affini: la sola differenza che si può rilevare è costituita dal fatto che le rappresentazioni grafiche inventate da Leibniz non sono molto conosciute, mentre anche oggi nelle scuole si adottano i diagrammi di Eulero per presentare certi rapporti logici tra concetti.

E' facile osservare che con i diagrammi di Eulero si ottiene una visualizzazione dei rapporti logici; ma il significato e la portata di tale visualizzazione non vanno molto al di là del significato e della portata delle illustrazioni che si usano nella didattica della geometria.

Si pensi, per esempio, alla figura costituita da tre cerchi, A, B, C, ciascuno contenuto nel successivo; se si immagina che i punti di ciascuno dei cerchi siano simboli di elementi di un insieme, la figura visualizza i rapporti di tre insiemi, le cui relazioni di inclusione possono essere descritti con le proposizioni:

Ogni (elemento di) B è anche un (elemento di) C;

Ogni (elemento di) A è anche un (elemento di) B.

Se queste due proposizioni sono considerate come premesse (rispettivamente maggiore e minore) di un sillogismo, è noto che lo schema sillogistico indicato nella logica classica con la parola convenzionale BARBARA [forma perfetta della prima figura] conduce a concludere la validità della conclusione:

Dunque ogni (elemento di) A è anche un (elemento di) C.

Ma pare chiaro che il diagramma di Eulero che visualizza la situazione dei tre cerchi permette di "vedere" la validità della terza proposizione, ma sarebbe difficile accettare che ne costituisce una dimostrazione rigorosa.

4 - L'avvento del simbolismo logico

Abbiamo affermato che in Leibniz ed in Eulero si incontra una rappresentazione grafica delle relazioni tra concetti e delle deduzioni. Il passaggio ad un vero e proprio calcolo doveva avvenire in seguito, con l'identificazione del processo di deduzione logica con le leggi formali, sintattiche del simbolismo che si adotta. Così per esempio in Peano (4) troviamo la esplicita osservazione del fatto che lo schema sillogistico BARBARA [di cui abbiamo già detto] si traduce nella regola formale dei simboli, che enuncia la proprietà transitiva della relazione di inclusione tra insiemi. Pertanto il sillogismo:

(1) Se P è contenuto in Q ed anche Q è contenuto in R allora P è contenuto in R

viene simbolizzato esplicitamente con l'applicazione di una legge di calcolo riguardante i simboli degli insiemi ed il simbolo della relazione di inclusione.

E' noto che il passo fondamentale verso questa evoluzione del simbolismo logico è stato fatto da G. Boole (5). Presso questo autore incontriamo in particolare le osservazioni riguardanti le somiglianze e le differenze tra il calcolo algebrico [che opera sui numeri] ed il calcolo che egli proponeva, fondato sulle operazioni di intersezione e di unione tra insiemi.

Per fissare le idee, ed a titolo di esempio elementare possiamo prendere in considerazione lo schema BARBARA [di cui abbiamo detto ripetutamente].

A tal fine osserviamo anzitutto che la relazione di inclusione tra insiemi può essere espressa mediante l'operazione di intersezione e la relazione di uguaglianza tra insiemi. Inoltre, dati due insiemi P e Q, scriveremo semplicemente PQ per indicare l'insieme intersezione dei due [insieme costituito dagli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi considerati]; e facendo così seguiremo la strada aperta dal Boole, che indicava l'intersezione di due insiemi come "prodotto" dei due, e (come si è detto) rappresentava le operazioni logiche con simboli mutuati dall'algebra.

Con queste convenzioni le prime due affermazioni del sillogismo (1) vengono rappresentate simbolicamente con le uguaglianze:

(2) $PQ = P$; $QR = Q$.

Eseguendo il "prodotto" a sinistra di entrambi i membri della seconda uguaglianza per P, applicando la proprietà associativa di questa operazione e tenendo conto della prima uguaglianza si giunge alla relazione:

(3) $PR = P$,

la quale traduce appunto il fatto che ogni (elemento) di P è anche (elemento) di R.

Abbiamo detto che questa procedura costituisce soltanto un esempio elementare delle procedure formali su cui volevamo riflettere. Esula dai fini di queste brevi note la presentazione delle riflessioni e degli sviluppi della logica formale successiva. Ci limitiamo ad osservare che nella deduzione presentata viene accettata senza difficoltà la sostituzione, in una formula, del risultato di un calcolo precedente. Si tratta di una procedura che la matematica applica automaticamente in forza della referenza semantica (significato dei simboli), ma che a livello formale deve essere esplicitamente formulata.

BIBLIOGRAFIA

(1) Federigo Enriques. Voce "Analisi" in Enciclopedia Italiana. Istituto G. Treccani. Vol. III, p. 86.

(2) René Descartes. La Géométrie.

(3) Giuseppe Peano. Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Torino (Bocca ed.) 1988.

(4) Giuseppe Peano. Formulario mathematico. Editio V. Torino, 1908. Cap. I, 2. p. 5.

(5) George Boole; The laws of thought. London, 1854.